Chapitre 18

Matrices

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ et le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices et opérations matricielles

1.1 Définitions et notations

Définition 18.1 (Matrice, ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille doublement indexée

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Une matrice de taille (n,p) peut être vu comme un tableau à n lignes, p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est dite de taille (n,p). On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notation. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, a_{ij} est appelé coefficient d'indice (i,j) : c'est le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et j-ième colonne. Étant donné une matrice X, on peut aussi noter X_{ij} ou encore $[X]_{ij}$ le coefficient d'indice (i,j) de X.

Comme pour les suites qu'on note (u_n) et non $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur les valeurs n, p, on pourra noter $A = (a_{ij})$ ou encore $A = (A_{ij})$ sans préciser les valeurs possibles prises par i et j (il suffit par exemple de préciser "$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$" au préalable).

Il y a ambiguité sur la notation : l'écriture a_{123} peut désigner a_{ij} pour $(i,j) = (12,3)$ ou $(i,j) = (1,23)$. En pratique, cela ne pose que *très* rarement problème. Si c'est le cas, on pourra noter $a_{i,j}$ plutôt que a_{ij}, de sorte qu'on distingue bien $a_{12,3}$ et $a_{1,23}$.

Définition 18.2 (Matrices de formes particulières)

- Toute matrice n'ayant qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$$
- Toute matrice n'ayant qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne. C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
- Une matrice avec n lignes et n colonnes est appelée matrice carrée (de taille n). C'est donc un élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On note
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

Remarque. Contrairement à la notation a_{ij}, pour l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la virgule est obligatoire : $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de taille (np,np) !

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in \dots\dots\dots \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & i & 2-i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \dots\dots\dots \qquad C = \begin{pmatrix} \pi \end{pmatrix} \in \dots\dots\dots$$

Exemple 2. La matrice nulle de taille (n,p) :

$$0_{n,p} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

La matrice identité de taille n :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Définition 18.3

Deux matrices $A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites égales et on note $A = B$ si tous leurs coefficients sont égaux. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 18.4 (+ et $\lambda\cdot$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$A+B := (A_{ij}+B_{ij})$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$\lambda A := (\lambda A_{ij})$$

Autrement dit, $[A+B]_{ij} = A_{ij}+B_{ij}$ et $[\lambda A]_{ij} = \lambda A_{ij}$.

Exemple 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -11 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -14 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $0A = 0_{n,p}$ et $1A = A$.

Propriété 18.5

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien.

Démonstration. On vérifie toutes les assertions de la définition. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $+$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: en effet, comme pour tous indices $(i, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A_{ij} + B_{ij} \in \mathbb{K}$. Finalement $A + B = (A_{ij} + B_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. $+$ est associative sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car $+$ l'est sur $\mathbb{K}$:
$$(A+B)+C = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) = A+(B+C)$$
3. $+$ est commutative sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car $+$ l'est sur $\mathbb{K}$:
$$A+B = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = B+A$$
4. La matrice nulle $0_{n,p}$ vérifie
$$A+0_{n,p} = (a_{ij}+0) = (a_{ij}) = A$$
et comme on a montré que $+$ est commutative, on a automatiquement $0_{n,p} + A = A$. Ainsi, $0_{n,p}$ est élément neutre pour $+$.
5. Enfin,
$$A+(-A) = (a_{ij}-a_{ij}) = 0_{n,p}$$
et par commutativité on a aussi $(-A)+A = 0_{n,p}$. Ainsi, la matrice $-A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le symétrique de A pour $+$.

□

Remarque. Attention ! On ne peut pas additionner des matrices de tailles différentes. L'opération $A + B$ n'a de sens que si A, B ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

1.3 Produit matriciel

Définition 18.6 (Produit matriciel)

Soit $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n,\boxed{p}}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{\boxed{p},q}(\mathbb{K})$. On définit le produit de A et B par :

$$AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \qquad c_{ij} := \sum_{k=1}^{\boxed{p}} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \boxed{p}\text{ lignes} & \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{kj} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & b_{pq} \end{pmatrix}}^{q\text{ colonnes}} \\
n\text{ lignes} & \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ & & & & \\ & & & & a_{np} \end{pmatrix}}^{\boxed{p}\text{ colonnes}} & \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})
\end{array}$$

Exemple 5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 6. Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \qquad BA =$$

Remarque. Pour que le produit AB ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{n'a pas de sens mais...}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{a un sens}$$

On observe que si le produit AB a un sens, il se peut que le produit BA n'en ait pas ! Mais même lorsque AB et BA ont un sens, on verra qu'en général $AB \neq BA$.

Propriété 18.7 ("Associativité" du produit)

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration.

□

Propriété 18.8 (Bilinéarité du produit)

Soit A, B, C trois matrices. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, lorsque les opérations ci-dessous ont un sens :

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

En particulier, $\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$.

1.4 Matrices élémentaires

Notation. Pour tous entiers i, j, on définit le symbole de Kronecker par : $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemple 7. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. On définit la matrice élémentaire $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$[E_{k\ell}]_{ij} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $E_{k\ell}$ est la matrice avec un 1 à l'intersection de la ligne k et de la colonne ℓ, et 0 ailleurs :

$$E_{k\ell} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{0} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & \mathbf{0} & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & \mathbf{0} & \end{array} \right) \text{(ligne } k\text{)} \\ \text{(col. } \ell\text{)} \end{array}$$

Chaque couple (k, ℓ) donne une matrice $E_{k\ell}$ différente : il y a donc np matrices élémentaires dans l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Propriété 18.9

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $j, k \in [\![1, p]\!]$ et $\ell \in [\![1, q]\!]$. On considère les matrices élémentaires $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

.

Démonstration. Soit $u \in [\![1,n]\!]$ et $w \in [\![1,q]\!]$. Il suffit de montrer que $[E_{ij}E_{k\ell}]_{uw} = \left[\delta_{jk}E_{i\ell}\right]_{uw}$.

□

2 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

Soit $A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le produit AB a un sens si et seulement si $n = p$. Ainsi, $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui va lui conférer une structure d'anneau que n'ont pas les espaces $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$.

2.1 Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Le but de cette partie est de montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau. Il faut donc montrer que :

1. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien.
2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un monoide.
3. $\times$ est distributive sur $+$.

L'assertion 1 est vraie par la propriété 18.5. De plus, l'assertion 3 est une conséquence de la propriété 18.8 avec $\lambda = \mu = 1$. Il reste donc à montrer l'assertion 2.

- On a vu que le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est toujours bien défini. Ainsi, la loi $\times$ est une l.c.i. sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- De plus, par la propriété 18.7 avec $(p,q,r) = (n,n,n)$, la loi $\times$ est associative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Enfin, la propriété suivante montre que la matrice identité I_n est élément neutre de $\times$:

Propriété 18.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $AI_n = I_nA = A$.

Démonstration. Soit $i,k \in [\![1,n]\!]$. Alors

$$[AI_n]_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}[I_n]_{jk}$$

Or, $[I_n]_{jk} = \delta_{jk}$. On peut donc garder uniquement le terme de la somme pour $j = k$: les autres termes sont nuls.

$$[AI_n]_{ik} = A_{ik}\delta_{kk} = A_{ik}$$

Donc par arbitraire sur i,k, on a $AI_n = A$. On montre de même que $I_nA = A$. $\square$

On a donc montré que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un monoide.

Propriété 18.11

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il est non commutatif si $n \geq 2$.

Démonstration. On a vu plus haut que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Il reste à montrer la non commutativité. On pose

$$A = \begin{pmatrix} & & 2 \\ & \text{\Large 0} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad B = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \text{\Large 0} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Alors

$$AB = \qquad\qquad\qquad BA =$$

On en déduit donc que $AB \neq BA$. $\square$

Remarque. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ (a) &\mapsto a \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. On peut alors identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}$. En particulier, $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est commutatif.

2.2 Matrices carrées de forme particulière

Définition 18.12 (Matrice scalaire)

On appelle matrice scalaire une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $n \in \mathbb{N}^*$).

Notation. Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on note

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Définition 18.13 (Matrice diagonale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est (une matrice) diagonale s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Autrement dit, $A = (a_{ij})$ est diagonale si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

Remarque. La forme générale d'une matrice diagonale est donc

$$\begin{pmatrix} * & & & \mathbf{0} \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & * \end{pmatrix}$$

où chaque symbole $*$ peut être remplacé par une valeur quelconque dans $\mathbb{K}$ (pas forcément la même). Nous allons utiliser ce formalisme régulièrement dans la suite pour présenter les définitions.

Exemple 8. Les matrices suivantes sont diagonales :

$$0_{n,n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & n \end{pmatrix} \qquad I_n$$

Exemple 9. Toute matrice scalaire est diagonale. La réciproque est fausse si $n \geq 2$.

Remarque. Si $A = (a_{ij})$, on appelle diagonale de A tous les coefficients a_{ii} avec $1 \leq i \leq n$. Cette notion existe même si A n'est pas une matrice diagonale. Par exemple la diagonale de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est constituée des coefficients 1 et 4.

Propriété 18.14

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. Alors AB est une matrice diagonale. De plus, A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

Démonstration. Voir l'exemple 6, qu'il est par ailleurs important de connaitre. □

Définition 18.15 (Matrice triangulaire)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire supérieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & \text{\huge$*$} \\ & * & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i > j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire inférieure</u> si A est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & & \text{\huge 0} \\ & * & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge$*$} & & & * \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad i < j \implies a_{ij} = 0$$

- On dit que A est <u>(une matrice) triangulaire</u> si A est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

Notation. On note

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille n.
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de taille n.
- $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires de taille n.

Exemple 10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire .... I_4 est triangulaire ....

Exemple 11. Une matrice est triangulaire supérieure ***et*** inférieure si et seulement si elle est diagonale. Autrement dit $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 18.16

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Plus précisément, on peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \text{\huge$*$} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \text{\huge$*$} \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & \text{\huge$*$} \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge$*$} & & & \alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge$*$} & & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_2\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge$*$} & & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

2.3 Puissances de matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A possède autant de lignes que de colonnes, si bien que le produit AA a un sens.

Définition 18.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit la puissance k-ième de A par :

$$A^k = \underbrace{AAA\dots A}_{k \text{ fois}}$$

Par convention, on considère que $A^0 = I_n$.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ étant un anneau, A^k correspond à l'itéré k-ième de A pour la loi $\times$.

Les matrices carrées sont les seules matrices qu'on peut élever à la puissance. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$, alors A^k n'a de sens que si $k = 1$ (et écrire A^1 est maladroit...).

Exemple 12. Si $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $A^k = \operatorname{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$.

Exemple 13. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,2}$. Ainsi, si $k \geq 2$, $\quad A^k = A^2 A^{k-2} = 0_{2,2} A^{k-2} = 0_{2,2}$.
En particulier, A est un diviseur de zéro dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est donc pas intègre (et de même pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$).

Propriété 18.18 (Calcul dans un anneau – version $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{AB = BA} \implies (A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$\boxed{AB = BA} \implies A^m - B^m = (A - B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$$

Exemple 14. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la puissance m-ième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4 Inverse d'une matrice

Définition 18.19 (Matrice inversible)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n$$

Il n'y a alors qu'une seule matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant cette assertion et on note $A^{-1} := B$. La matrice A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n. Cet ensemble est appelé le groupe linéaire.

Autrement dit, A est inversible si elle est symétrisable pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A^{-1} est son (unique) symétrique pour la loi $\times$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif (sauf si $n = 1$), il faudrait en théorie vérifier que $AB = I_n$ et $BA = I_n$ pour la même matrice B avant de conclure que A est inversible. Mais $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est particulier :

Propriété 18.20 (Être inversible “d'un seul côté” suffit pour être inversible)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = BA = I_n \qquad$ (càd A est inversible)
2. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad BA = I_n$
3. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB = I_n$

Démonstration. Admis pour le moment. □

Comme $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a immédiatement :

Propriété 18.21

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe. En particulier, pour toutes matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$:

- $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (A^{-1})^{-1} = A$.
- $AB \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

En particulier, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $\quad A^k \in GL_n(\mathbb{K}) \quad$ et $\quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k =: A^{-k}$.

Exemple 15. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $B = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$, on vérifie que $AB = BA = I_2$. Ainsi, A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exemple 16. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible : en effet avec $D = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$, on vérifie que $CD = DC = I_2$. Ainsi, C est inversible et $D = C^{-1}$.

Exemple 17. La matrice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $X^2 = 0_{2,2}$. Ainsi, X n'est pas inversible. En effet, si X était inversible,

$$X^{-2}X^2 = X^{-2}0_{2,2} = 0_{2,2} \qquad \text{et} \qquad X^{-2}X^2 = X^{-2+2} = X^0 = I_2$$

et donc $I_2 = 0_{2,2}$ ce qui serait absurde.
Note : le même argument fonctionne dans un anneau A quelconque : un diviseur de zéro n'est jamais inversible.

3 Transposition

3.1 Définition et propriétés

Définition 18.22 (Matrice transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle (matrice) transposée de A, la matrice (notée) $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$[A^\top]_{ij} = A_{ji}$$

En d'autres termes, $A^\top$ est obtenu à partir de A en faisant la "symétrie" de A par rapport à sa "diagonale".

Exemple 18. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & i & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & i & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 19. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriété 18.23

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $(A^\top)^\top = A$.
2. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$.

Démonstration.

$\square$

Propriété 18.24

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Démonstration.

$\square$

Propriété 18.25

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration.

$\square$

3.2 Matrices carrées symétriques et antisymétriques

Définition 18.26 (Matrice symétrique)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si $A^\top = A$, càd si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
- On dit que A est antisymétrique si $A^\top = -A$, càd si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.
  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Ces deux notions n'ont de sens que pour une matrice carrée : si A n'est pas carrée, alors A et $A^\top$ n'ont pas la même taille et ne peuvent donc pas être égales.

Exemple 20. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Propriété 18.27

Si une matrice A est antisymétrique, alors les coefficients sur sa diagonale sont nuls.

Démonstration.

$\square$